

Д.Т. БАБИЧЕВ, д.т.н., профессор каф. "Детали машин" ТюмГНГУ, г. Тюмень, Россия

Д.А. БАБИЧЕВ, аспирант каф. ТТС ТюмГНГУ (Нефтегазовый университет)

Д.Н. ПАНКОВ, ассистент кафедры "Детали машин" ТюмГНГУ

Е.Б. ПАНФИЛОВА, ассистент каф. ПТ ТюмГАСУ (Архитектур. строит. ун-т)

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК НА ОГИБАЮЩЕЙ, ЗНАЯ ТОЧКИ НА ОБВОЛАКИВАЮЩЕЙ

Розрізняють два види поверхонь, формованих тілами, що рухаються: обволакаюча, що її обгинає. У роботі викладений розроблений авторами кінематичний метод обчислення координат крапок на, що обгинає, коли знайдена обволакаюча. Метод є наближеним; заснований на використанні понять "швидкість і прискорення впровадження"; і дозволяє суттєво зменшити обсяг обчислень при використанні недиференціальних методів знаходження, що обгинає. Дана оцінка точності й надійності методу.

There are two kinds of surfaces that are formed by the movable bodies: wraparound and envelope surfaces. In this work the authors develop velocity (kinematic) envelope points' calculation method, when the envelope is known. The method is approximate; and based upon the usage of terms "speed and acceleration"; and lets reduce the amount of calculation using undifferentiated methods of envelope estimation.

Постановка проблемы. В теории формообразования поверхностей движущимися телами различают [1] два вида получаемых поверхностей: обволакивающая и огибающая – см. рисунок 1. Обволакивающая Σ_1 – связанное множество дискретного семейства кусков исходных инструментальных поверхностей (ИИП); огибающая Σ_2 – поверхность, касающаяся всех элементов этого дискретного множества. Огибающая Σ_2 является обычно гладкой поверхностью; обволакивающая Σ_1 – всегда поверхность с огранкой (гребешками). Нахождение огибающей Σ_2 – одна из основных задач теории зубчатых зацеплений, и её решению посвящено большое число работ [2-10]. В основе названных работ – дифференциальные методы: классические [2-3] и кинематический [4-10], который стал с середины 20 века основным в теории зацеплений. Обволакивающую Σ_1 находят [1,11-12], непосредственно отслеживая положение точек производящей поверхности Σ_0 относительно заготовки – метод прямого цифрового моделирования (ПЦМ) по [12]. Большинство специалистов, моделирующих процессы формообразования на компьютерах, считают методы ПЦМ более надёжными, нежели кинематиче-

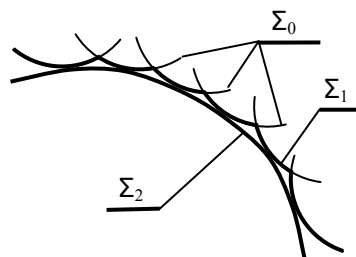


Рисунок 1 – Производящая, обволакивающая и огибающие поверхности:

Σ_0 – производящая;
 Σ_1 – обволакивающая;
 Σ_2 – огибающая

ски и потому предпочитают находить обволакивающую, а не огибающую. Вследствие чего такие методы профилирования – основа наиболее мощных российских программных комплексов: а) системы "ЭКСПЕРТ" для гипоидных и конических передач, созданной Г.И.Шевелевой и её учениками; б) комплекса "SPDIAL+" для передач червячного типа, созданный В.И. Гольдфарбом и его учениками. А также многих зарубежных: а) программа ПЦМ С.В.Лунина (США); б) программный комплекс фирмы Klingelnberg (Германия), разработанный при участии и известного российско-

го специалиста по коническим и гипоидным передачам М.Г.Сегалю. Но нахождение точек на обволакивающей Σ_1 , а не на огибающей Σ_2 , имеет ряд недостатков. Во-первых, требуется выполнить на 1-2 порядка больше вычислений, чем при нахождении точек на огибающей. Во-вторых, возникают сложности в определении кривизны формируемой поверхности, необходимой, в частности, для оценки контактной прочности зубьев и нагрузочной способности масляной пленки. Эти сложности в том, что:

• Кривизна ленточных и чешуйчатых поверхностей принципиально и существенно отличается от кривизны огибающей. Например, у эвольвенты, как огибающей прямолинейной рейки, радиус кривизны плавно изменяется вдоль этой кривой: вблизи основной окружности $\rho_b = 0$, а на диаметре вершин

$\rho_a = \rho_{\max} = \sqrt{r_a^2 - r_b^2}$. Однако у обволакивающей эвольвенты, формируемой той же прямолинейной рейкой, радиусы кривизны во всех точках $\rho = \infty$ (да в изломах $\rho = 0$). Т.к. обволакивающая такой эвольвенты есть ломаная линия, касающаяся эвольвенты каждым своим прямолинейным отрезком.

• Точки, найденные недифференциальными методами, часто располагают на ленточных и чешуйчатых поверхностях в узлах некоторой регулярной *ив*-сетки, которую практически невозможно увязать с центрами лунок или с впадинами ленточек. Поэтому, найденное множество точек располагается по отношению к лункам или ленточкам весьма неудачно: любая из точек может оказаться: и в центре лунки, и на гребне, и вблизи вершины пирамидки. Что ведёт к появлению ошибок, если кривизну вычислять, аппроксимируя точки кривыми или поверхностями.

В-третьих, усложняется решение контактной задачи численными методами: точки, располагаясь случайно на гребнях и во впадинах огранки, искажают величину деформаций в анализируемых точках. Это вносит ошибки в вычисляемые контактные напряжения и даёт "рваные" границы мгновенных площадок контакта.

Общепринятое средство "сближения" обволакивающей Σ_1 с огибающей Σ_2 – задание очень малых подач при компьютерном моделировании процесса формообразования. Это, конечно же, снижает "шероховатость" получаемой при моделировании поверхности, что уменьшает погрешности при решении контактной задачи. Но проблему вычисления кривизны огибаемой не решает; хотя бы потому, что кривизна обволакивающей не зависит от подачи.

Цель работы. Изложить кинематический метод "сближения" обволакивающей Σ_1 с огибающей Σ_2 , основанный на использовании понятий "скорость внедрения V_{BH} " и "ускорение внедрения a_{BH} ". И дать оценку его точности, степени надёжности и объёма вычислений. Метод может быть использован вместо метода малых подач или совместно с ним. Прежде чем перейти к изложению самого метода, рассмотрим скорость и ускорение внедрения, на которых метод базируется.

1. Скорость внедрения V_{BH} , предложенная В.А. Шишковым [4] – называемая также скоростью взаимного сближения и отдаления [4] – есть скорость углубления исходной инструментальной поверхности (ИИП) в объем заготовки. Находят скорость внедрения, как проекцию вектора скорости движения инструмента относительно обрабатываемой детали на направление нормали к ИИП в этой точке, т.е.:

$$V_{BH} = \mathbf{V}_{12} \cdot \mathbf{n} = V_{12x} \cdot n_x + V_{12y} \cdot n_y + V_{12z} \cdot n_z, \quad (1)$$

где \mathbf{V}_{12} – вектор относительной скорости в точке на ИИП: $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_{инстр} - \mathbf{V}_{загот}$; \mathbf{n} – орт нормали к ИИП в этой точке, всегда направленный из тела инструмента, например, из объема шлифовального круга, но не вовнутрь него.

Скорость V_{BH} , вычисленная по (1), это скалярная величина, которая может быть:

- *положительной* – инструмент (Σ_1) внедряется в объем заготовки (Σ_2), и происходит сьем металла, если он есть в этом месте на заготовке;
- *отрицательной* – Σ_1 отходит от Σ_2 , и обработка в данном месте невозможна;
- *нулевой* – данная точка на инструменте в этот момент времени формирует точку, лежащую на той поверхности, которая получится на заготовке после завершения обработки: на огибающей семейства производящих поверхностей.

Понятие "скорость внедрения" применимо не только к технологическим зацеплениям, но и к рабочим. Более того, в [10] кинематический показатель "скорость внедрения" распространен на все возможные виды производящих элементов: на изломы поверхностей в виде рёбер и вершин; на плоские и на пространственные линии с изломами и гладкие; на точки. И для всех видов относительного движения звеньев: однопараметрического, двухпараметрического и многопараметрического.

2. Ускорение внедрения a_{BH} , предложенное Д.Т. Бабичевым, есть ускорение, с которым производящий элемент (обычно поверхность) внедряется ("вдавливается") в объём того тела, на котором формируется сопряженный элемент (обычно также поверхность). То есть a_{BH} показывает, как быстро во времени изменяется скорость внедрения V_{BH} , в данной точке того пространства, в котором находится формируемый элемент (формируемая поверхность в пространственных зацеплениях и формируемая линия – в плоских). Ускорение внедрения – ускорение относительное; и также как скорость внедрения, –

скалярная величина. Впервые a_{BH} , было применено при расчете зон резания и вычислении толщин слоев, срезаемых режущими кромками обкатных инструментов [13]. Позднее [10] было выявлено, что ускорение внедрения a_{BH} есть весьма значимый качественный показатель процесса формообразования: а) ребро возврата на поверхности, формируемой методом огибания, есть множество точек, в которых при формообразовании $a_{BH} = 0$; б) если a_{BH} *положительно*, то *огибающая формируется внутри тела производящего элемента*, что в металле неосуществимо и свидетельствует о наличии подрезания; в) касание двух сопряженных поверхностей осуществимо в металле лишь в точках, где $a_{BH} < 0$; г) через ускорение внедрения a_{BH} , которое, кстати, не зависит от направления сечения, вычисляется [14] приведённая кривизна в любых нормальных сечениях и в одно- и в многопараметрических зацеплениях:

$$\frac{1}{R_p} = -\frac{\omega_k^2}{a_{BH}}, \quad \frac{1}{R_p} = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega_{k i}^2}{a_{BH i}} \right), \quad (2)$$

где ω_k – угловая скорость перекачивания тел в плоскости сечения, в котором вычисляется кривизна; n – число параметров огибания. И это далеко не полный перечень задач, при решении которых целесообразно использовать a_{BH} [10].

Находим a_{BH} , дифференцируя V_{BH} по времени t :

$$a_{BH} = \frac{dV_{BH}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{V}_{12} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{a}_{12} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{V}_{12} \cdot \dot{\mathbf{n}}, \quad (3)$$

где \mathbf{V}_{12} – вектор относительной скорости; \mathbf{n} – орт нормали к поверхности, направленный из тела производящего элемента; \mathbf{a}_{12} – ускорение точки, находящейся на производящей поверхности Σ_1 и скользящей по ней со скоростью " $-\mathbf{V}_{12}$ ".

Отметим, что ускорение внедрения отличается от производной уравнения зацепления, используемой обычно [6] при расчетах кривизн. Различие это в методе вычисления частных производных от криволинейных координат и параметра огибания по времени: $\frac{\partial u}{\partial T}, \frac{\partial v}{\partial T}, \frac{\partial t}{\partial T}$ (будем их ниже обозначать

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{t}$). В [6] они находятся из условия, чтобы точка оставалась контактной (приравнивая к нулю производные по времени от уравнения зацепления). Здесь же, уравнение связи $\dot{u}, \dot{v}, \dot{t}$ записываем иначе:

$$\mathbf{C}_u \cdot \dot{u} + \mathbf{C}_v \cdot \dot{v} + \mathbf{V}_{12} \cdot \dot{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{BH}. \quad (4)$$

Т.е. скорость скольжения точки по производящему элементу выбирается (за счет назначения $\dot{u}, \dot{v}, \dot{t}$) так, чтобы вектор скорости движения этой точки являлся вектором скорости внедрения. Это ключевое положение в методике

вычисления a_{BH} . И его можно вычислять в любом месте поверхности производящего элемента, а не только в точках контакта.

И еще одно существенное замечание: производная орта нормали $\dot{\mathbf{n}}$, входящая в (3) и называемая иногда скоростью конца орта нормали [6], является и угловой скоростью перекачивания. А ω_k и ω_k^\perp есть проекции этого вектора $\dot{\mathbf{n}}$ на оси правого трехгранника Дарбу [15] с осями $\{\mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{n}, \mathbf{n}\}$. Т.е. формулу (3) для вычисления ускорения внедрения a_{BH} можно представить в виде:

$$a_{BH} = \mathbf{a}_{12} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{V}_{12} \cdot \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_{12} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{V}_{12} \cdot \mathbf{c} \cdot \omega_k + \mathbf{V}_{12} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{n}) \cdot \omega_k^\perp. \quad (5)$$

3. Вычисление параметров, нужных для нахождения ускорение внедрения. Нахождение векторов ω_k , ω_k^\perp и, особенно, \mathbf{a}_{12} , входящих в (5), представляет для конкретных зацеплений немалые трудности. Поэтому, приведём формулы для их определения в обобщенном зацеплении, показанном на рисунке 2. В системы координат и движений этого зацепления можно вписать практически любую конкретную передачу или станочное зацепление. И приводимые ниже формулы можно, поэтому, применять для любых конкретных зацеплений. На рисунке 2 оба звена, образующих зацепление, совершают винтовые движения около своих осей, а сами оси участвуют в винтовом движении вокруг межосевого перпендикуляра. Производящий элемент находится на звене 1, формируемый – на звене 2. На характер движения звеньев не накладывается никаких ограничений: параметры движения ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, V_1, V_2$ и V_3) могут быть переменными или постоянными во времени, положительными, отрицательными или равными нулю. Все эти параметры считаем функциями одной, двух или n независимых параметров движения (t_1, t_2, \dots, t_n), что

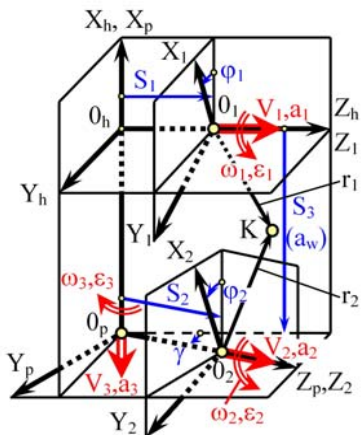


Рисунок 2 – Обобщенное зацепление

будет соответствовать одно-, двух-, или n -параметрическому движению (огибанию). Заметим, что в [16, 10] показано, в том числе на примерах: поверхности среза, возникающие иногда при подводе-отводе инструментальных, есть огибающие многопараметрического семейства производящих поверхностей. И потому анализ многопараметрических зацеплений есть важная практическая задача, а не абстрактные теоретические изыскания. Полагаем, что в зацеплении на рисунке 2 известны:

- перемещения, скорости и ускорения по всем шести движениям ($\phi_1, \omega_1, \epsilon_1, \dots$);
- координаты точки на производящем элементе ($x_1, y_1, z_1; x_h, y_h, z_h; \dots, x_2, y_2, z_2$);

- орт нормали \mathbf{n} к производящему элементу в этой точке ($n_{x1}, n_{y1}, n_{z1}; \dots, n_{x2}, n_{y2}, n_{z2}$);
- кривизны производящего элемента в этой точке ($R_R^1, R_R^{\perp}, R_K^1, \mathbf{c} = \{c_{x1}, c_{y1}, c_{z1}\}$).

Здесь: R_R^1, R_R^{\perp} – радиусы кривизны производящей поверхности в двух взаимно перпендикулярных нормальных сечениях; R_K^1 – радиус геодезического кручения линии вдоль орта касательной \mathbf{c} ; \mathbf{c} – орт касательной к производящей поверхности, задающий первое направление (в нём радиус кривизны равен R_R^1). Заметим, что если орт \mathbf{c} направлен по одному из главных направлений на производящей поверхности, то $R_K^1 = \infty$, т.е. геодезическая кривизна $k_K^1 = \frac{1}{R_K^1} = 0$. Поэтому, настоятельно рекомендуется задавать касательную \mathbf{c} вдоль одного из главных направлений на производящей поверхности: не нужно будет вычислять R_K^1 или k_K^1 .

О направлении орта нормали \mathbf{n} и о знаках радиусов кривизны и кручения:

а) орт нормали \mathbf{n} всегда направлен наружу из тела производящего элемента;

б) R_R^1 и R_R^{\perp} положительны для выпуклых поверхностей; в) $R_K^1 > 0$, если при движении вдоль орта \mathbf{c} , орт нормали \mathbf{n} , вращаясь вокруг \mathbf{c} , порождает левый винт.

Ниже приводим формулы для вычисления всех параметров, необходимых для вычисления ускорения внедрения по формуле (5). При этом, не даём общеизвестные формулы для вычисления орта нормали \mathbf{n} и радиусов кривизны R_R^1, R_R^{\perp} по заданному уравнению производящей поверхности. Не приводим и формулы преобразования координат для обобщенного зацепления на рисунке 2.

3.1. Формулы, зависящие от вида зацепления. Приводим их для рисунка 2. Вектор относительной угловой скорости ω_{12} в системе координат $X_h Y_h Z_h$:

$$\omega_{12}^{(h)} = \{\omega_3 \cdot \mathbf{i}, -\omega_2 \cdot \sin \gamma \cdot \mathbf{j}, (\omega_1 - \omega_2 \cdot \cos \gamma) \cdot \mathbf{k}\}. \quad (6)$$

Вектор относительной линейной скорости \mathbf{V}_{12} в системе координат $X_h Y_h Z_h$:

$$\left. \begin{aligned} V_{12x}^{(h)} &= V_3 - \omega_1 \cdot y_h + \omega_2 \cdot y_p; \\ V_{12y}^{(h)} &= -V_2 \cdot \sin \gamma + \omega_1 \cdot x_h - \omega_2 \cdot x_p \cdot \cos \gamma - \omega_3 \cdot z_h; \\ V_{12z}^{(h)} &= V_1 - V_2 \cdot \cos \gamma + \omega_2 \cdot x_p \cdot \sin \gamma + \omega_3 \cdot y_h. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Вектор относительного ускорения \mathbf{a}_{12} :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{12} &= [(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) + (\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) \times \mathbf{r}_1 + \epsilon_2 \times \mathbf{S}_3 - (\epsilon_2 + \epsilon_3) \times \mathbf{S}_1] + \\ &+ [\omega_1 \times (\omega_1 \times \mathbf{r}_1) - \omega_3 \times (\omega_2 \times \mathbf{S}_2) - (\omega_2 + \omega_3) \times ((\omega_2 + \omega_3) \times \mathbf{r}_2)] - \\ &- [2 \cdot (\omega_3 \times \mathbf{V}_2) - (\omega_3 \times \omega_2) \times \mathbf{r}_2] - 2 \cdot (\omega_2 + \omega_3) \times \mathbf{V}_{12} - \omega_{12} \times \mathbf{V}_{12}. \end{aligned} \quad (8)$$

При анализе двухпараметрических зацеплений, по формулам (6)–(8) нужно вычислять дважды, находя по отдельности скорости и ускорения от каждого из параметров огибания. Соответственно, при рассмотрении n -параметрических зацеплений, следует вычислять по n значений скоростей и ускорений.

Применить формулы (6)–(8) для конкретных зацеплений можно, вычеркнув из них слагаемые, содержащие нулевые ускорения, скорости или перемещения. Например, для всех ортогональных передач (гипоидной, червячной, глобоидной, спироидной и других), принимая: $\gamma=90^\circ$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_1 = \pm i_{12}$ (здесь знак "–", если направление одной из скоростей ω_1 или ω_2 не совпадает с направлением, указанным на рисунке 2), $\omega_3 = V_1 = V_2 = V_3 = 0$, $S_3 = a_w$, получим вместо уравнений (6)–(8) более простые выражения:

$$\omega_1^{(h)} = \{0 \cdot \mathbf{i}, 0 \cdot \mathbf{j}, i_{12} \cdot \mathbf{k}\}; \quad \omega_2^{(h)} = \{0 \cdot \mathbf{i}, 1 \cdot \mathbf{j}, 0 \cdot \mathbf{k}\}; \quad \omega_{12}^{(h)} = \{0 \cdot \mathbf{i}, -1 \cdot \mathbf{j}, i_{12} \cdot \mathbf{k}\}. \quad (6a)$$

$$\mathbf{V}_{12}^{(h)} = \{(-i_{12} \cdot y_h + y_p) \cdot \mathbf{i}, i_{12} \cdot x_h \cdot \mathbf{j}, x_p \cdot \mathbf{k}\}. \quad (7a)$$

$$\mathbf{a}_{12} = [\omega_1 \times (\omega_1 \times \mathbf{r}_1) - \omega_2 \times (\omega_2 \times \mathbf{r}_2)] - (\omega_1 + \omega_2) \times \mathbf{V}_{12}. \quad (8a)$$

Здесь:

$$\mathbf{r}_1^{(h)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_2^{(h)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

при $\varphi_2 = \varphi_{20} + \frac{\varphi_1}{i_{12}}$; где φ_1 – параметр огибания.

Аналогично можно получить упрощенные формулы для цилиндрических, реечных и других передач, а также кулачковых механизмов и станочных зацеплений. Так, для плоской реечной передачи, положив: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $\gamma=90^\circ$, $\omega_2 = 1$, $V_1 = -a_w$, $\omega_1 = \omega_3 = V_2 = V_3 = 0$, $S_3 = a_w$, получим:

$$\omega_1^{(h)} = \mathbf{0}; \quad \omega_2^{(h)} = \{0 \cdot \mathbf{i}, 1 \cdot \mathbf{j}, 0 \cdot \mathbf{k}\}; \quad \omega_{12}^{(h)} = \{0 \cdot \mathbf{i}, -1 \cdot \mathbf{j}, 0 \cdot \mathbf{k}\}. \quad (6b)$$

$$\mathbf{V}_{12}^{(h)} = \{y_p \cdot \mathbf{i}, 0 \cdot \mathbf{j}, (x_p - a_w) \cdot \mathbf{k}\}. \quad (7b)$$

$$\mathbf{a}_{12} = -\omega_2 \times (\omega_2 \times \mathbf{r}_2) - \omega_2 \times \mathbf{V}_{12}. \quad (8b)$$

При этом можно использовать формулы (9), полагая $\varphi_1=0$; и принимая в формулах преобразования координат $\varphi_2 = \varphi_{20} + \frac{S_1}{a_w}$; где S_1 – параметр огибания.

3.2. Формулы, не зависящие от вида зацепления. По ним вычисляем угловые скорости перекачивания ω_k и ω_k^\perp , входящие в уравнение (5).

Угловая скорость перекачивания ω_k есть угловая скорость поворота орта

\mathbf{n} нормали к производящей поверхности относительно формируемой поверхности, замеряемая в плоскости, задаваемой векторами \mathbf{n} и \mathbf{c} . Ее вычисляем по формуле:

$$\omega_k = (\mathbf{n} \times \mathbf{c}) \cdot \omega_{12} + \frac{\mathbf{V}_{12} \cdot \mathbf{c}}{R_R^1} + \frac{\mathbf{V}_{12} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{c})}{R_K^1} = \left(\omega_{12}^{(i)} + \frac{\mathbf{V}_{12}^{(i)}}{R_K^1} \right) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{n}) + \frac{\mathbf{V}_{12}^{(i)}}{R_R^1} \cdot \mathbf{c}. \quad (10)$$

Все три составляющие в средней части формулы (10) есть вращения в плоскости нормального сечения, проходящего через векторы \mathbf{n} и \mathbf{c} . Первое слагаемое – проекция вектора относительной угловой скорости ω_{12} на нормаль к секущей плоскости, т.е. вращение нормали в этой плоскости, обусловленное относительным вращением звеньев. Второе слагаемое учитывает вращение нормали к поверхности, возникающее при скольжении тел в плоскости нормального сечения из-за кривизны поверхности в этом сечении. Третье слагаемое учитывает вращение нормали к поверхности, возникающее из-за скольжения тел в направлении перпендикулярном плоскости нормального сечения и обусловленное геодезическим кручением линии на поверхности.

Угловая скорость перекачивания в плоскости, перпендикулярной орту \mathbf{c} :

$$\omega_k^\perp = \left(-\omega_{12} + \frac{\mathbf{V}_{12}}{R_K^1} \right) \cdot \mathbf{c} + \frac{\mathbf{V}_{12}}{R_R^1} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{n}). \quad (11)$$

При анализе двух- и n -параметрических зацеплений, по формулам (10)–(11) нужно вычислять два или n раз, находя по отдельности скорости перекачивания от каждого из параметров огибания.

4. Принцип нахождения точек на огибающей кинематическим методом. Формообразование есть процесс взаимодействия поверхности Σ_0 тела производящего элемента с пространством \mathbf{g}_2 , в котором тело движется. Если в таком пространстве \mathbf{g}_2 поместить другое тело – "изделие", то движущийся производящий элемент, заметая пространство, сформирует на этом теле поверхность Σ_2 , которая есть огибающая семейства поверхностей Σ_0 – границ производящего элемента.

Точки, принадлежащие формируемой поверхности Σ_2 , есть те точки поверхности Σ_0 производящего элемента, в которых скорость внедрения $V_{BH}=0$. Чтобы найти эти точки нужно решать уравнение зацепления. Если из уравнения зацепления находят одну из криволинейных координат u или v , это означает поиск контактной точки на поверхности Σ_0 при заданном значении параметра огибания. Если находят параметр огибания t , то это означает поиск перемещения поверхности Σ_0 , при котором заданная на Σ_0 точка, станет контактной. Но в любом случае поиск точки на поверхности Σ_2 начинается с решения уравнения зацепления.

В настоящей работе рассмотрен принципиально иной метод нахождения огибающей, т.е. точек на Σ_2 . Его особенности:

- Точки на Σ_2 находим прямым методом – без решения уравнения зацепления.
- Для вычисления координат "сопряженной" точки на Σ_2 нужно знать только: а) координаты точки на поверхности Σ_1 (она и Σ_0); б) проекции орта нормали к Σ_1 в этой точке; в) скорость и ускорение внедрения (V_{BH} и a_{BH}) в этой же точке.
- "Сопряженные" точки на формируемой поверхности находим в той же системе координат, в которой заданы параметры, названные в предыдущем пункте.
- Метод пригоден для всех разновидностей формообразования поверхностей кинематическим способом: при одно-, двух- и n-параметрическом движении производящего элемента в виде поверхности, или линии, или точки.
- Метод является приближенным; его точность тем выше, чем ближе исходная точка на поверхности Σ_1 к контактной точке и к формируемой поверхности Σ_2 .

Принцип нахождения точки на поверхности Σ_2 , формируемой методом однопараметрического огибания, иллюстрирует рисунок 3. На нем:

- точки A_1 и B_1 – заданы на производящей поверхности Σ_1 , и расположены вблизи контактной точки K ;
- точки A_2 и B_2 – искомые точки на формируемой поверхности, расположенные, соответственно, "напротив" точек A_1 и B_1 ;
- $\mathbf{n}_1^{(A)}$, $\mathbf{n}_1^{(B)}$ – орты нормалей к Σ_1 ;
- V_{BH} и a_{BH} – скорости и ускорения внедрения;
- δ_A и δ_B – расстояния от искомых точек A_2 и B_2 до заданных A_1 и B_1 .

Вблизи точки B_1 происходит формирование поверхности Σ_2 за счет "вдавливания" поверхности Σ_0 в направлении нормали $\mathbf{n}_1^{(B)}$. Точка A_2 на Σ_2 уже сформирована, и поверхность Σ_0 , находясь от точки A_2 на расстоянии δ_A , удаляется от неё со скоростью $V_{BH}^{(A)}$. Считаем (из-за малости расстояний δ_A и δ_B) движение "вдавливания" на отрезке δ_B и движение отдаления на отрезке δ_A равнопеременными, т.е. $a_{BH} = \text{const}$. Эти отрезки δ , а также время Δt их прохождения, вычисляем по формулам для равнопеременного движения:

$$\delta = -\frac{V_{BH}^2}{2 \cdot a_{BH}}; \quad \Delta t = -\frac{V_{BH}}{a_{BH}}. \quad (12)$$

5. Алгоритм нахождения огибающей кинематическим методом. Рассмотрим лишь случай формообразования при одном параметре огибания.

Этап 1. Любым из недифференциальных методов найти по три декартовых координаты (x_2, y_2, z_2) множества Σ_1 точек A_1 , расположенных на обволакивающей. При вычислении этих координат дополнительно найти и запомнить: а) проекции n_{x2}, n_{y2}, n_{z2} орта нормали \mathbf{n}_1 к поверхности Σ_0 (в системе ко-

ординат изделия – $X_2Y_2Z_2$); б) векторы относительных скоростей: угловой ω_{12} (6) и линейной V_{12} (7) – также в $X_2Y_2Z_2$; в) скорость V_{BH} (1) и ускорение a_{BH} (8-11, 5) внедрения в точках A_1 .

Этап 2. Пересчитать координаты всех точек множества Σ_1 (обволакивающая) во множество Σ_2 (огибающая) в следующей последовательности:

- Вычислить расстояние δ вдоль нормали \mathbf{n}_1 к Σ_1 , и время Δt по формулам (12).
- Найти нормаль \mathbf{N} и её орт $\mathbf{n}^{(\Sigma 2)}$ к огибающей поверхности (также в $X_2Y_2Z_2$):

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}_1 + (\omega_{12} \times \mathbf{n}_1) \cdot \Delta t; \\ N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}; \quad \mathbf{n}^{(\Sigma 2)} = \frac{\mathbf{N}}{N}. \quad (13)$$

- Вычислить расстояния δ_n по нормали к поверхности Σ_2 (см. рисунок 3):

$$\delta_n = \delta \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1). \quad (14)$$

- Найти координаты точек на огибающей поверхности Σ_2 (см. точку A_3 на рисунке 3):

$$x_2^{(\Sigma 2)} = x_2 + \delta_n \cdot n_x^{(\Sigma 2)}, \quad y_2^{(\Sigma 2)} = y_2 + \delta_n \cdot n_y^{(\Sigma 2)}, \quad z_2^{(\Sigma 2)} = z_2 + \delta_n \cdot n_z^{(\Sigma 2)}. \quad (15)$$

Замечание. При использовании недифференциальных методов, точки множества Σ_2 получают, обычно, в виде таблицы аппликат t_{ij} в центрах uv -сетки – см. [1, раздел 4.6]. Чтобы при пересчете всех точек множества Σ_1 (обволакивающая) во множество Σ_2 (огибающая), точки оказались в центрах uv -сетки, следует вместо (14) использовать формулу:

$$\delta_n = \delta \cdot \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_S}. \quad (16)$$

где \mathbf{n}_S – орт вектора, направленного из узла uv -сетки и показывающего направление отсчета аппликаты t_{ij} ; орт \mathbf{n}_S должен быть направлен в ту же сторону, что и орт нормали \mathbf{n}_1 , т.е. внутрь тела заготовки.

6. Оценка точности и надёжности предлагаемого метода. Для оценки точности метода исследовался процесс формообразования прямобоочной рейкой эвольвентного профиля прямозубого цилиндрического колеса. Такое зацепление взято в качестве объекта исследования в силу того, что для эвольвенты не сложно получить формулы для вычисления расстояний рассчитываемых точек от теоретической огибающей, каковой эвольвента и является. В

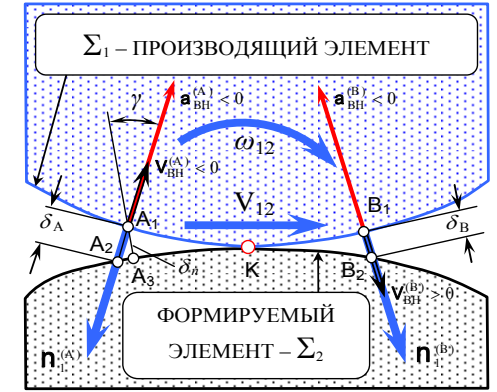


Рисунок 3 – Принцип нахождения точек на огибающей поверхности Σ_2

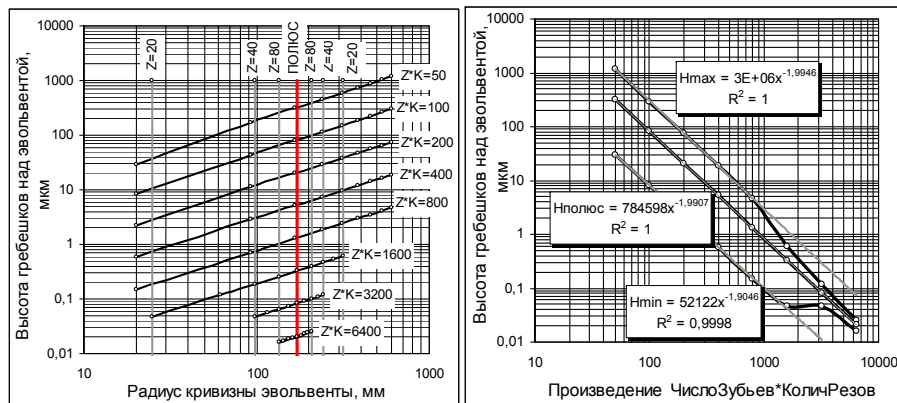


Рисунок 4 – Отклонение обволакивающей поверхности Σ_1 от огибающей Σ_2

программе, созданной для моделирования этого процесса формообразования, реализованы алгоритмы и формулы, приведенные выше. Расчеты проводились для зубчатого колеса с делительным диаметром $d = \text{const} = 1000 \text{ мм}$. На первом этапе анализировалось влияние трех параметров на высоту гребешков обволакивающей над эвольвентой: z – числа зубьев; k – количества ходов (резов), совершаемых рейкой при повороте колеса на один зуб; $\rho_{\text{эвол}}$ – радиуса кривизны эвольвенты, задающего положение точки на зубе колеса. Полученные зависимости представлены на рисунке 4.

Видно, что: а) на делительном цилиндре величина отклонения гребешков об-

волакивающей от эвольвенты определяется зависимостью $H_{\text{полус}} = \frac{7,85 \cdot 10^5}{(z \cdot k)^2}$

мкм, при $d = 1000 \text{ мм}$; б) вблизи окружности вершин при малом числе зубьев она в четыре раза больше, а вблизи основной окружности – в 15 раз меньше, чем на делительной окружности.

На втором этапе исследовалось влияние тех же трех параметров (z , k , $\rho_{\text{эвол}}$) на отклонения от эвольвенты точек, полученных предлагаемым кинематическим методом. Результаты этого анализа на рисунке 5.

Из этого рисунка следует, что: а) максимальные отклонения полученных точек от эвольвенты мало зависят от положения точек на ней – см. левую часть рисунка 1; б) максимальное отклонение от эвольвенты подчиняются за-

висимости $\Delta H_{\text{max}} = \frac{2 \cdot 10^6}{(z \cdot k)^3}$ – см. тренды в правой части рисунка 5; в) приме-

нение вышеизложенного кинематического метода в качестве "постпроцессора" к недифференциальным методам нахождения огибающей (через обволакивающую), позволяет снизить величину максимальных отклонений найденных точек от огибающей на 1-3 порядка, т.е. в 10-1000 раз.

О степени надежности предлагаемого метода. Она соответствует вы-

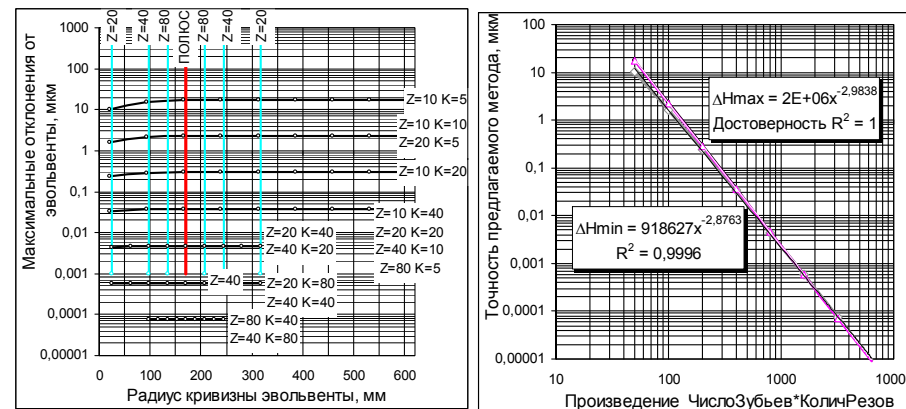


Рисунок 5 – Точность предлагаемого метода нахождения огибающей поверхности Σ_2

сокой надежности недифференциальных методов, но при соблюдении одного требования: на обволакивающей не должно быть элементов (полосок или лунок) с очень малым радиусом кривизны. Очень малый радиус кривизны имеет тот элемент обволакивающей (и производящей) на котором на двух соседних гребнях или вершинах угол между нормальными к этому элементу более 3-4 градусов. Элементами с очень малым радиусом кривизны являются, в частности, все изломы на производящих элементах. Поэтому способ не пригоден для анализа переходных поверхностей, формируемых изломами. Заметим, что в [4, 6] изложен метод нахождения огибающих, формируемых изломами. Этот метод был опробован д.т.н. Е.С. Трубаевым в системе "SPDIAL+", показав хорошую надежность при сокращении времени счета более чем на два порядка.

Список литературы: 1. Шевелева Г.И. Теория формообразования и контакта движущихся тел. М.: Мостанкин, 1999. – 494 с. 2. Гохман Х.И. Теория зацеплений, обобщенная и развитая путем анализа: Дисс... магистра механики, Одесса, 1886. – 232с. 3. Колчин Н.И. Аналитический расчет плоских и пространственных зацеплений (с приложением к профилированию режущего инструмента и расчету погрешностей в зацеплениях). – М.-Л.: Машгиз, 1949. – 210с. 4. Шишков В.А. Образование поверхностей резанием по методу обкатки. – М.: Машгиз, 1951. – 150с. 5. Давыдов Я.С. Незвольвентное зацепление. – М.: Машгиз, 1950. – 189с. 6. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с. 7. Ерихов М.Л. Принципы систематики, методы анализа и вопросы синтеза схем зубчатых зацеплений: Автореф. дисс... докт. техн. наук. – Л., 1972. – 48с. 8. Залгаллер В.А. Теория огибающих. – М.: Наука, 1975. – 104с. 9. Гольдфарб В.И. Некоторые упражнения с уравнениями зацепления // Пространство зацеплений. Сборник докладов научного семинара Учебно-научного центра зубчатых передач и редукторостроения. – Ижевск-Электросталь, 2001. – С.20–24. 10. Бабичев Д.Т. Развитие теории зацеплений и формообразования поверхностей на основе новых геометро-кинематических представлений: Автореф. дисс... докт. техн. наук. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2005. – 47с. 11. Несмелов И.П., Гольдфарб В.И. Недифференциальный подход к решению задачи огибаания // Механика машин. – Вып.61. – М.: Наука, 1983. – С.3–10. 12. Goldfarb V.I., Lunin S., Trubachov E.S. Advanced computer modeling in gear engineering. In: Proceedings of ASME International Power Transmission and Gearing Conference. Chicago, Illinois, USA, September 2–6. 2003. 13. Лангофер А.Р., Бабичев Д.Т., Раихман Г.Н. Шунаев Б.К. Исследование на ЭВМ нагрузки на режущие кромки зуборезного

инструмента // Станки и инструменты. – №1. – 1986. – С.18–19. 14. Бабичев Д.Т. Ускорение внедрения и кривизны в зацеплениях // Теория и практика зубчатых передач и редукторостроения: Сб. докл. научно-технической конференции с международным участием. – Ижевск, 2008. – С.157–161. 15. Дусев И.И. Связь между кривизнами взаимоогibaемых поверхностей зубьев пространственных зацеплений // Изв. вузов. Машиностроение. – 1969. – №3. 16. Бабичев Д.Т. О применении многопараметрических огибаний при компьютерном моделировании процессов формообразования в рабочих и технологических зацеплениях // Теория и практика зубчатых передач: Сб. докл. научно-технической конференции с международным участием. – Ижевск, 2004. – С.302–315.

Поступила в редколлегию 14.04.10

УДК 621. 833

В.А. БЕРЕЖНОЙ, ст.преп. каф. НГГ НТУ "ХПИ", г. Харьков

О ВЫБОРЕ РАСЧЁТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРЯМОЗУБЫХ ПЕРЕДАЧ

Відбувається вибір розрахункової динамічної моделі для евольвентної циліндричної прямозубої передачі. На основі рівняння Лагранжа складається система диференціальних рівнянь динамічної системи зубчастих передач.

Occurs a choice accounting dynamic models for cylindrical spur gears. On the base of equation Lagrang forms a system of differential equations of dynamic toothed issue system.

Введение. Точность динамического расчёта зубчатых передач определяется принятой моделью динамической системы и её параметрами. Сама процедура динамического расчёта зубчатых передач после получения системы дифференциальных уравнений, описывающих их динамическое состояние, не отличается от разработанных в теории колебаний аналитических и численных методов расчёта упругих систем. Поэтому основное внимание при динамических расчётах зубчатых передач следует уделять обоснованному выбору расчётных моделей и определению параметров зубчатых передач.

Выбор расчётной динамической модели для эвольвентной цилиндрической прямозубой передачи не может быть сделан однозначно, он в значительной мере зависит от целей выполняемого динамического расчёта. Поэтому следует стремиться к получению такой динамической модели, с помощью которой можно получить ответ на поставленный вопрос с необходимой точностью [1, 2].

Постановка задачи. Цель работы – обосновать простейшую эквивалентную схему и получить математическую модель динамики одноступенчатой цилиндрической эвольвентной прямозубой передачи на основе уравнений Лагранжа с учетом жесткости зубьев и валов, которая в дальнейшем будет

использована для исследования изменения собственных частот системы при воздействии на жесткость зубьев [3, 4].

Разработка расчётной динамической модели для эвольвентных цилиндрических прямозубых передач. Механическую систему "двигатель – передача – исполнительный механизм" можно упрощенно представить в виде эквивалентной четырехмассовой динамической модели (рисунок 1). Где: I_1 – момент инерции двигателя; I_4 – момент инерции исполнительного механизма; $I_{ш}$ и I_k – моменты инерции шестерни и колеса; C_1 и C_4 – крутильные жесткости соединительных валов; $c_{ш}^3$ и c_k^3 – жесткости зубьев шестерни и колеса передачи; C_3 – жесткость зацепления передачи, где $C_3 = c_{ш}^3 + c_k^3$.

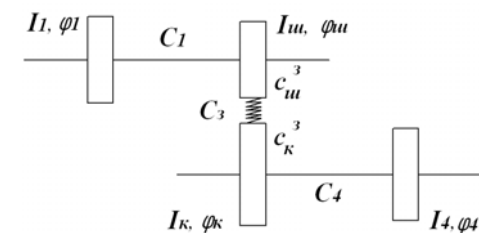


Рисунок 1 – Динамическая модель цилиндрического эвольвентного прямозубого зацепления в плоском виде

Зубчатые колёса представляются в виде твёрдых тел, посаженных на несущие валы, зубья же колёс представляются в виде консольных балок, жёстко соединённые с ободом зубчатого колеса (рисунок 2). Моделирование упругой связи непосредственно в зацеплении зубчатых колес осуществлено с помощью пружинки (рисунки 1-2).

При сделанных допущениях из анализа движения системы вытекает, что данная динамическая модель определяется четырьмя обобщенными координатами:

φ_1, φ_4 – углы поворота ведущей и ведомой присоединенных масс;

$\varphi_{ш}, \varphi_k$ – углы поворота шестерни и колеса соответственно.

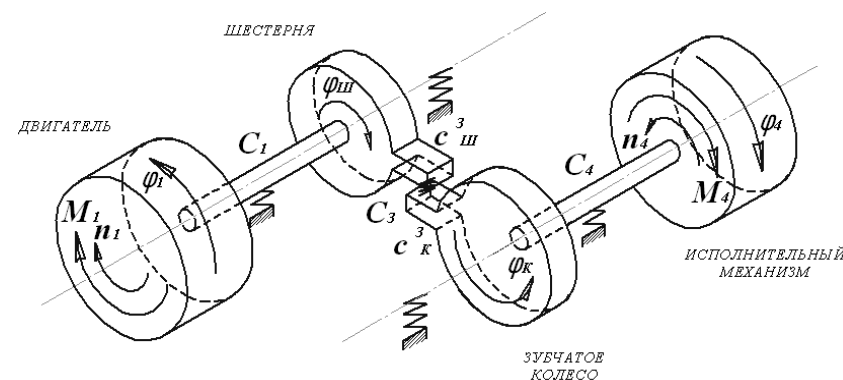


Рисунок 2 – Динамическая модель цилиндрического эвольвентного прямозубого зацепления в пространственном виде